ЗМІСТ ЛЕКЦІЙ

Тема 1. Границя послідовності. Границя функції. Односторонні границі. Основні теореми про границі.

Означення понять «границя послідовності», «границя функції».

Нехай функція y=f(x) визначена у деякому околі точки $x = a$, за винятком, хіба що, самої точки $x = a$.

Число *b* називається *границею функції* f(x) *при* x→ a, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x-a|<\delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Теореми про границю суми, різниці, добутку і частки.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \times g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(c \times f(x)\right) = c \times \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Означення терміну «невизначеність». Різні видів невизначеностей, та правила їх розкриття.

1) відношення двох нескінченно великих величин
2) різниця двох нескінченно великих величин
3) добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику;
4) відношення двох нескінченно малих величин

і т.п.

Поняття «односторонньої границі». Ліва та права границі.

Запис $x \to x_0$ можна розуміти, як наближення до точки x_0 зліва, коли $x < x_0$ і справа, коли $x > x_0$. Таким чином, наближення точок *x* до x_0 може бути двостороннім. На основі цього введені означення правої та лівої границі.

Число *A* є границею функції *f(x)* зліва (лівою границею), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) = A.$

Число *B* є границею функції *f(x)* справа (правою границею), якщо для як завгодно малого значення $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх *x* з

проміжку $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність
$|f(x) - B| < \varepsilon$
$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B.$

Ліва і права границі називаються односторонніми границями.

Функція *f(x)* має границю в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існують одночасно границі справа та зліва та вони рівні між собою
$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$

Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$ і записується $A = \lim\limits_{x \to \infty} f(x),$ якщо для будь-якої нескінченно-великої послідовності $\{x_n\}$ всі члени якої належать до множини E, послідовність $\{f(x_n)\}$ - збіжна до числа $A.$

Література

1. Андрійчук Ю.В., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б., Вступ до дискретної математики. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003.–254с
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
4. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська Академія", 2009.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Вибрані питання. Київ. Видавничий дім "Києво-Могилянська Академія", 2007.
6. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003
7. М. Ядренко. Дискретна математика: Навч.-метод. посібник. – К. : ТВіМС, 2004.-244с.

Тема 2. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Перша та друга визначні (особливі) границі

Означення нескінченно малої і нескінченно великої функцій:

Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* функцією (infinitesimal function) (або просто н. м.) в точці $x = a$ (або при $x \to a$), якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=0$$

Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* функцією (infinite function) (або просто н. в.) в точці $x=a$ (або при $x\to a$), якщо:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих у точці функцій є нескінченно малою в точці функцією;

Добуток скінченного числа нескінченно малих у точці функцій, а також добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно малою в точці функцією.

Еквівалентні нескінченно малі функцій. Таблиця еквівалентних нескінченно малих. Приклади застосування.

1.	$\sin x \sim x$	6.	$\ln(1+x)\sim x$
2.	$\arcsin x \sim x$	7.	$\log_a x \sim \dfrac{x}{\ln a}$
3.	$\mathrm{tg} x \sim x$	8.	$a^x - 1 \sim x\ln a$
4.	$\mathrm{arctg} x \sim x$	9.	$e^x - 1 \sim x$
5.	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	10.	$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Застосування еквівалентних функцій дозволяє швидко знаходити границі показникових, тригонометричних та інших функцій

Правила порівняння нескінченно малих величин.

1) функції α_1(x) та α_2(x) називають ***нескінченно малими одного порядку*** при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = a \neq 0,\ \ a\in R$;

2) функції α_1(x) називають ***нескінченно малою вищого порядку,*** ніж α_2(x) при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$;

3) функції α_1(x) називають ***нескінченно малою нижчого порядку,*** ніж α_2(x) при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$;

Перша визначна (особлива) границя. Її суть якої полягає в тому, що границя відношення синус функції до аргументу, коли той прямує до нуля рівна одиниці

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

Друга визначна границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

де *e=2,71828182849045...* – експонента.

Література

1. Андрійчук Ю.В., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б., Вступ до дискретної математики. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003.–254с
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
4. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська Академія", 2009.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Вибрані питання. Київ. Видавничий дім "Києво-Могилянська Академія", 2007.
6. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003
7. М. Ядренко. Дискретна математика: Навч.-метод. посібник. – К. : ТВіМС, 2004.-244с.

Тема 3. Неперервність функції в точці, на відрізку. Точки розриву функцій. Класифікація точок розриву

Якщо правостороння границя функції в точці не співпадає з лівосторонньою, то має місце розрив функції. Розрив першого роду (якщо обидві границі – числа), розрив другого роду (якщо хоча б одна з границь – правостороння або лівостороння рівна нескінченості). Усувна точка розриву - можливість доозначення функції в точці розриву в випадку співпадання правосторонньої та лівосторонньої границі

Неперервність функції в точках. Кусково-неперервні функції

Означення. Для неперервності функції f(x) в точці X_0 необхідно і достатньо, щоб границя функції зліва при $x\to X_0$ дорівнювала границі функції справа і дорівнювала значенню функції у даній точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

Неперервна на відрізку функція має такі властивості:

1) будь-яка неперервна на відрізку функція обмежена на цьому відрізку;

2) якщо функція неперервна на відрізку, то на цьому відрізку існує точка, в якій функція набуває свого найбільшого значення та точка, в якій функція набуває свого найменшого значення на цьому відрізку;

3) якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a,b] і на його кінцях набуває значень різних знаків, то хоча б в одній точці відрізку [a,b] значення функції дорівнює нулю, тобто рівняння f(x)=0 має на відрізку [a,b] принаймні один дійсний корінь.

Література

1. Андрійчук Ю.В., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б., Вступ до дискретної математики. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003.–254с
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
4. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська Академія", 2009.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Вибрані питання. Київ. Видавничий дім "Києво-Могилянська Академія", 2007.
6. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003
7. М. Ядренко. Дискретна математика: Навч.-метод. посібник. – К. : ТВіМС, 2004.-244с.

Тема 4. Похідна функції. Означення і зміст. Теореми про похідні. Похідна складної функції, похідна оберненої функції. Таблиця похідних.

Означення похідної

$$y=f(x)$$

$$y'=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y'=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Похідною функції $y=f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргумента, коли приріст аргумента прямує до нуля.

Операцію знаходження похідної називають диференціюванням

Геометричний зміст похідної:

Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$ дорівнює значенню похідної в точці x_0.

k – кутовий коефіцієнт дотичної

$k = tg\,\alpha$, α – кут нахилу дотичної

$k = f'(x_0)$

Механічний зміст похідної:

$v(t_0) = x'(t_0)$ $\qquad$ $a(t_0) = v'(t_0)$

x_0 – координата точки

$v(t_0)$- швидкість точки в момент часу t_0

$a(t_0)$ – прискорення точки в момент часу t_0

Властивості похідних

$$C' = 0$$

$$(Cu)' = Cu'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\begin{cases} x = x(t),\ y = y(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y(u),\ u = u(x) \\ y'_x = y'_u \cdot u'_x \end{cases}$$

$$y' = y \cdot (\ln|y|)'$$

$$\begin{cases} y = y(x),\ x = x(y) \\ y'_x = \dfrac{1}{x'_y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = u^x \\ y' = u' \cdot v \cdot u^{v-1} + v' \cdot u^v \ln u \end{cases}$$

Таблиця похідних

Таблиця похідних

1. $\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^{2} x}$
6. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^{2} x}$
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \quad (|x|<1)$
8. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \quad (|x|<1)$
9. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^{2}}$
10. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^{2}}$
11. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a \quad (a>0, a\neq 1)$
12. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$
13. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x>0)$
14. $(\log_{a} x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x>0, a>0, a\neq 1)$

Література

1. Андрійчук Ю.В., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б., Вступ до дискретної математики. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003.–254с
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
4. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська Академія", 2009.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Вибрані питання. Київ. Видавничий дім "Києво-Могилянська Академія", 2007.
6. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003
7. М. Ядренко. Дискретна математика: Навч.-метод. посібник. – К. : ТВіМС, 2004.-244с.

Тема 5. Диференціал. Похідні високих порядків.

Якщо функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0, то вираз $f'(x_0)\cdot\Delta x$ називається *диференціалом* (differential) функції в цій точці і позначається символом $dy(x_0)$. Тобто,

$$dy(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

Диференціал функції $y = f(x)$ в даній точці є головною лінійною частиною приросту функції, пропорційною приросту аргументу з коефіцієнтом пропорційності $f'(x_0)$:

$$\Delta y = d\,y(x_0) + \alpha \cdot \Delta x.$$

Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто

$$d\,x = \Delta x.$$

$$f'(x) = \frac{d\,y}{d\,x}$$

З правил знаходження похідної випливають правила знаходження диференціала. Якщо функції $u(x)$, $v(x)$ диференційовані в точці *x*, то

1) $d(u+v) = du + dv$.

2) $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$.

Зауваження. $d(c \cdot u) = c \cdot du$, де $c = const$.

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$, $(v \neq 0)$.

Під похідною вищих порядків розуміють диференціювання функції більше ніж один раз. Якщо похідну *y'(x)* повторно диференціювати, то одержимо похідну другого порядку, або другу похідну функції *y=f(x),* і вона позначається

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Похідна третього порядку матиме запис

$$y''' = (y'')' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Аналогічно отримують формули для знаходження похідних вищих порядків. При знаходженні похідної *(n+1)* порядку необхідно знати похідну *n*-го порядку. Вийняток становлять функції, для яких можна помітити закономірність зміни похідних. Це степеневі, деякі тригонометричні та експоненціальні функції:

$(ax)^{\alpha}, \cos(ax), \sin(ax), e^{ax}.$

В інших випадках, для знаходження похідних вищих порядків від заданої функції потрібно послідовно знаходити всі її похідні нижчих порядків.

Література

1. Андрійчук Ю.В., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б., Вступ до дискретної математики. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003.–254с
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ I-II р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ I-II р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
4. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. – К. : Вид. дім “Києво-Могилянська Академія“, 2009.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Вибрані питання. Київ. Видавничий дім “Києво-Могилянська Академія“, 2007.
6. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003
7. М. Ядренко. Дискретна математика: Навч.-метод. посібник. – К. : ТВіМС, 2004.-244с.

Тема 6. Екстремуми функції, асимптоти функцій Загальне вивчення функції та схема побудови графіка функції.

Екстремум — найбільше та найменше значення функції на заданій множині. Розрізняють: локальний — екстремум в деякому довільно малому околі даної точки глобальний — екстремум в усій розглядуваній області значень функцій

ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ (МАКСИМУМІВ І МІНІМУМІВ) ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРШОЇ ПОХІДНОЇ

1) знайти область визначення D(f);

2) знайти похідну f'(x);

3) знайти критичні точки x_0;

4) дослідити знак похідної f'(x) на інтервалах, які отримали від розбиття критичними точками області визначення.

При цьому критична точка x_0 є точкою мінімуму, якщо при переході через неї зліва направо f'(x) змінює знак з від'ємного "-" на додатній "+", в протилежному випаду x_0 є точкою максимуму.

Замість даного правила можна визначати другу похідну f''(x) і досліджувати згідно другої теореми.

5) обчислити значення функції в точках екстремуму.

Асимптота фунції — це пряма, до якої функція при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько.

Якщо функція, задана рівнянням y = f(x), віддаляється в нескінченність при наближенні x до скінченної точки a, то пряма x = a називається вертикальною асимптотою цієї функції

Схема побудови графіка

1) Область визначення функції
2) Область значень функції
3) Нулі функції
4) Дослідження на парність
5) Дослідження на періодичність
6) Знайдемо критичні точки функції
7)Інтервали зростання та спадання, точки max і min функції:
8) Точки перегину. Опуклість і вгнутість графіка функції
9) Визначити асимптоти

Література

1. Андрійчук Ю.В., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б., Вступ до дискретної математики. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003.–254с
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ I-II р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ I-II р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
4. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська Академія", 2009.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Вибрані питання. Київ. Видавничий дім "Києво-Могилянська Академія", 2007.
6. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003
7. М. Ядренко. Дискретна математика: Навч.-метод. посібник. – К. : ТВіМС, 2004.-244с.

Тема 7. Невизначений інтеграл. Означення. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця елементарних невизначених інтегралів. Методи інтегрування невизначених інтегралів: інтегрування по частинам, заміна змінної

Невизначений **інтеграл** для функції f — це сукупність усіх первісних цієї функції

Функцію F(x) називають первісною для функції f(x) на заданому проміжку, якщо для всіх *x* із цього проміжку $F'(x)=f(x)F'(x)=f(x)$.

Якщо *F(x)* – первісна для функції *f(x)* на заданому проміжку, то функція *f(x)* має безліч первісних, і всі ці первісні можна записати у вигляді *F(x)+C*, де *C* – довільна стала

Правила обчислення первісних

1. Первісна суми функцій дорівнює сумі первісних функцій: тобто якщо *F(x)* – первісна для *f(x)*, а *G(x)* – первісна для *g(x)*, то *F(x)+G(x)* – первісна для функції *f(x)+g(x)*.
2. Сталий множник можна виносити за знак первісної, тобто якщо *F(x)* – первісна для функції *f(x)* і *C* – стала, то *CF(x)* – первісна для *Cf(x)*.
3. Якщо *F(x)* – первісна для *f(x)* і *k*≠0, *b* – стала, то $1kF(kx+b)1kF(kx+b)$ – первісна для функції *f(kx+b)*.

Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом від функції f(x) називають вираз F(x)+C, тобто сукупність усіх первісних даної функції *f(x)*.

Позначається так: $\int f(x)dx=F(x)+C\int f(x)dx=F(x)+C$, де функцію *f(x)* називають *підінтегральною* функцією; вираз *dx – підінтегральним* виразом; *F(x)* – одна з первісних функції *f(x)*; C – довільна стала.

Основні правила інтегрування

1. $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.
2. $\int Cf(x)dx=C\int f(x)dx\int Cf(x)dx=C\int f(x)dx$.
3. Якщо *k≠0 k* і *b* – сталі, то $\int f(kx+b)dx=1kF(kx+b)+C\int f(kx+b)dx=1kF(kx+b)+C$.

Таблиця невизначених інтегралів елементарних функцій

$\int 0dx = C;$ $\int dx = x + C;$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$ $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C;$ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$ $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$ $\int e^x dx = e^x + C;$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

Метод заміни змінної

$$\int f(x)dx = \int g(w(x))w'(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + c = G(w(x)) + c$$

Інтегрування по частинах

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Література

1. Андрійчук Ю.В., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б., Вступ до дискретної математики. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003.–254с
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
4. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. – К. : Вид. дім “Києво-Могилянська Академія“, 2009.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Вибрані питання. Київ. Видавничий дім “Києво-Могилянська Академія“, 2007.
6. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003
7. М. Ядренко. Дискретна математика: Навч.-метод. посібник. – К. : ТВіМС, 2004.-244с.

Тема 8. Визначений інтеграл. Означення. Основні властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи інтегрування визначених інтегралів: інтегрування по частинам, заміна змінної

Означення визначеного інтеграла:

Означення. Якщо існує $\lim\limits_{\max \Delta x \to 0_i} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізку $[a,b]$ на частини, ні від вибору точок $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, то така границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx$$

Властивості визначеного інтеграла

1) При перестановці меж інтегрування знак інтегралу змінюється на протилежний: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2) Інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3) Відрізок інтегрування можна розбити на частини:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) Інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожного доданку:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла — це площа криволінійної фігури (криволінійної трапеції), обмеженої віссю абсцис, двома вертикалями на краях відрізка і кривою графіка функції.

Обчислення визначеного інтеграла як границі інтегральних сум з практичної точки зору непридатне як метод. Теорема про похідну визначеного інтеграла із змінною верхнею межею, розкриваючи глибокий зв’язок між невизначеним і визначеним інтегралом, встановлює простий і найважливіший метод обчислення визначених інтегралів. Цей метод грунтується на формулі Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Інтегрування частинами визначеного інтеграла

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Література

1. Андрійчук Ю.В., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б., Вступ до дискретної математики. — Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003.–254с
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а.) – К.: Вища школа, 2001
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ І-ІІ р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001
4. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська Академія", 2009.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Вибрані питання. Київ. Видавничий дім "Києво-Могилянська Академія", 2007.
6. Лейфура В.М. та інші. Математика (підручник для підготовки молодших спеціалістів економічних спеціальностей) – К.: Техніка, 2003
7. М. Ядренко. Дискретна математика: Навч.-метод. посібник. – К. : ТВіМС, 2004.-244с.